E.N.S.I. CHIMIE SUD 1984

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — Rappel de définitions :

1° f étant une fonction réelle, définie et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$, on a par définition :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(x)\,dx$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{0} f(x)\,dx + \lim_{x' \to +\infty} \int_0^{x'} f(x)\,dx.$$

Si ces limites existent, on dit que les intégrales impropres :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ sont convergentes.}$$

2° Il est rappelé que, si une fonction réelle f est continue sur un intervalle fermé borné I, elle est bornée sur I.

D'autre part, elle a la propriété suivante (appelée continuité uniforme sur I) :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout couple (x, x') de points de I, l'inégalité $| x' - x | \leqslant \delta_\varepsilon$ implique $| f(x') - f(x) | \leqslant \varepsilon$.

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[x + 1 + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \right].$$

et C sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

a. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(k + x) + f(k - x)$.

En déduire les éléments de symétrie de C.

b. Étudier les variations de f sur $[-1, +1]$, et construire l'arc C_0 de C correspondant à $x \in [-1, +1]$ (unité de longueur sur chacun des axes : 8 cm). Comment, après avoir construit C_0, obtiendrait-on la totalité de la courbe C ?

c. Préciser les points d'inflexion de C, ainsi que les points à tangente parallèle à $x'Ox$.

d. On pose, pour tout $m \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in [-1, +1]$:

.../...

$$f(x) - m\,x = F_m(x).$$

Étudier les variations de la fonction F_m ainsi définie. (On distinguera plusieurs cas, suivant la valeur de m.)

De cette étude, déduire le nombre des points d'intersection de l'arc C_0 avec la droite D_m d'équation $y = m\,x$.

e. On se propose de calculer une valeur approchée de la racine a comprise entre -1 et 1 de l'équation : $f(x) = -x$. On désigne par $P_n(h)$ le développement de Mc Laurin de la fonction :

$$h \longrightarrow F_{-1}\left(-\frac{1}{3} + h\right)$$

limité à l'ordre n. Calculer $P_1(h)$ et $P_2(h)$. Résoudre les équations $P_1(h) = 0$ et $P_2(h) = 0$, et en déduire un encadrement de a, rigoureusement justifié.

f. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0{,}35\text{, et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{\pi}\sin \pi\, u_n\right].$$

Du calcul des premiers termes de cette suite, déduire une valeur approchée de a, avec une erreur inférieure à 10^{-6}.

II

1° Soient f et g deux fonctions réelles intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale :

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x - t)\, dt$$

est convergente, la fonction $x \longrightarrow I(x)$ est notée $f * g$. Vérifier que :

a. $f * g = g * f$

b. Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, et pout tout couple (g_1, g_2) de fonctions réelles telles que $f * g_1$ et $f * g_2$ existent, on a :

$$f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 (f * g_1) + \lambda_2 (f * g_2).$$

2° Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 0, \quad \forall\, x < 0$$
$$u(x) = 1, \quad \forall\, x > 0$$
$$u(0) = \frac{1}{2}$$

A tout entier $n \geqslant 1$, on associe la fonction u_n définie par :

$$u_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} u(t)\, dt.$$

Calculer $u_n(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que devient $u_n(x)$ si l'on donne à $u(0)$ une valeur différente de $\frac{1}{2}$?

La fonction u_n est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? La représenter graphiquement.

3° Trouver une fonction réelle g_n, définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$, continue à droite au point $x = \frac{1}{n}$ et à gauche au point $x = -\frac{1}{n}$, telle que $u_n = u * g_n$.

suite/...

Donner la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, dx.$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$g_n(x) = n g(nx),$$

où g est une fonction réelle, dont on donnera la valeur $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4° Soit φ la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in [-1, +1], \varphi(x) = \cos^2 \frac{\pi}{2} x$$

$$\forall x \notin [-1, +1], \varphi(x) = 0$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par φ_n la fonction :

$$x \longrightarrow \varphi_n(x) = n . \varphi(nx)$$

Calculer l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\, dx.$$

5° Calculer la valeur, en tout point x de $\mathbb{R}$, de la fonction : $U_n = u * \varphi_n$. Donner la représentation graphique de U_n. Cette fonction est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

6° Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les limites de $u_n(x)$ et de $U_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

7° Calculer $\sup_{x \in R} | U_n(x) - u(x) |$ et $\sup_{x \in R} | u_n(x) - u(x) |$. Ces bornes supérieures tendent-elles vers 0 lorsque n tend vers l'infini ?

III

Soit ρ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, ayant les propriétés suivantes :

1° ρ est à valeurs positives, et intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

2° Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \notin [-\alpha, +\alpha], \quad \rho(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho(x)\, dx = 1.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par ρ_n la fonction :

$$x \longrightarrow n\, \rho(nx),$$

et par v_n la fonction :

$$v_n = u * \rho_n .$$

a. Calculer $v_n(x)$ pour tout $x \notin \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, donner une expression de $v_n(x)$ sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction ρ.

b. Calculer, pout tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} v_n(x)$. A quelle condition doit satisfaire la fonction ρ pour que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} v_n(x) = u(x) ?$$

c. Demontrer que, pour tout n, la fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}$.

d. Prouver que, si ρ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction v_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

e. f étant une fonction reelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f * \rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} f * \rho_n(x) = f(x).$$

IV

1° Soient p et q deux entiers naturels, et (a, b) un couple de nombres réels tel que $a < b$. On pose :

$$\int_a^b (x - a)^p (b - x)^q \, dx = I(p, q).$$

Pour tout $q \geqslant 1$, établir une relation linéaire entre $I(p, q)$ et $I(p + 1, q - 1)$. Calculer alors $I(p, q)$.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \, dx = a_n.$$

Donner la valeur de a_n.

3° Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{2}{n + 1}$.

4° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit h_n la fonction :

$$x \longrightarrow h_n(x) = \frac{1}{a_n}(1 - x^2)^n, \quad \forall x \in [-1, +1]$$
$$= 0 \qquad\qquad , \quad \forall x \notin [-1, +1]$$

Vérifier que h_n est continue sur $\mathbb{R}$.

5° A toute fonction réelle f, définie et continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f(x) = 0,$$

on associe la fonction $f_n = f * h_n$. Démontrer que la restriction de f_n à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ est une fonction polynome.

Que peut-on dire de son degré ?

6° Montrer que, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta \in]0,1[$ tel que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \qquad \left| \int_{-\delta}^{+\delta} [f(x) - f(x - t)] \, h_n(t) \, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

7° Démontrer que si $t \in]-1, -\delta[\cup]\delta, 1[$, on a :

$$|h_n(t)| \leqslant \frac{n + 1}{2}(1 - \delta^2)^n.$$

En déduire l'existence de $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left| \int_{-1}^{+\delta} [f(x) - f(x - t)] \, h_n(t) \, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

8° Vérifier alors la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

(on dit que f_n approche uniformément f sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$)